WOZU DIDAKTIK DER MATHEMATIK?

HEINRICH BÜRGER (Univ.Wien)

DIDAKTIK DER MATHEMATIK ALS WISSENSCHAFT

Die Didaktik der Mathematik befaßt sich mit dem *Lernen und Lehren von Mathematik*. Mit Problemen des Lernens und Lehrens sind alle, die Mathematik unterrichten, konfrontiert. Bei näherer Betrachtung erkennt man, daß diese Probleme vielfältig, komplex und vernetzt sind und von Einzelpersonen oder kleineren Gruppen nur unzureichend bearbeitet werden können. Vielmehr sind eingehende und systematische Untersuchungen theoretischer und empirischer Art, also *Forschungen* notwendig. Darüber hinaus ist eine *Kommunikation über die Ergebnisse* dieser Forschungen insbesondere durch Publikationen, Vorträge und Kongresse erforderlich. Um den Aufgaben der Didaktik der Mathematik gerecht zu werden, sind *wissenschaftliche Methoden und Vorgangsweisen* nötig.

Das bedeutet aber nicht, daß Didaktik der Mathematik nur von Wissenschaftlern an Universitäten betrieben werden soll. Vielmehr sollten sich möglichst viele Lehrerinnen und Lehrer eingehend und systematisch mit Problemen des Lernens und Lehrens von Mathematik auseinandersetzen. Didaktik der Mathematik kann als die *Berufswissenschaft des Lehrers* angesehen werden und Lehrerinnen und Lehrer sollten sich über Ergebnisse dieser Wissenschaft informieren und an deren Entwicklung beteiligen.

THEORIE UND PRAKTISCHES HANDELN

Wissenschaft wird im allgemeinen mit "theoretisch" und in Folge mit "hochgestochen" und "praxisfern" verbunden. Dazu ist festzustellen, daß auch in der Didaktik der Mathematik Theorien entwickelt werden und didaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeit von Theorien geleitet wird. Dabei kann eine Theorie als eine möglichst umfassende "Zusammenschau" eines Gegenstandsbereiches angesehen werden, die Zusammenhänge allgemeiner Art herstellt bzw. erkennen läßt und Erklärungen ermöglicht.

Jedes rationale Handeln geht von Annahmen oder Wissen allgemeiner Art aus. Dementsprechend sind auch in der "Praxis" Theorien eine Voraussetzung für überlegtes, vom Intellekt gesteuertes Handeln. Solche Theorien sind oft subjektiv, nicht ausformuliert, aber auch intersubjektiv. So liegen in der Landwirtschaft der Viehhaltung Annahmen über Zusammenhänge von Fleischqualität und Fütterung zugrunde, die auf persönlicher Erfahrung, auf Erfahrungen bekannter Personen oder auf Ratschlägen von Institutionen beruhen.

Theoretische Konzepte liegen oft auch Entscheidungen über die Unterrichtsgestaltung zugrunde. Ein Beispiel dafür ist das folgende Unterrichtskonzept: "Um ein Problem lösen zu können, müssen die dazu nötigen mathematischen Fertigkeiten beherrscht werden." Aus diesem Konzept lassen sich Folgerungen ziehen: "Um den Satz des Pythagoras für Berechnungen verwenden zu können, müssen die Schüler mit dem Begriff der Wurzel vertraut sein und Wurzeln berechnen zu können." Oder: "Um Volums- und Oberflächenberechnungen an Pyramiden durchführen zu können, müssen die Schüler den Satz des Pythagoras gelernt haben und ihn anwenden können."

Um untersuchen zu können, ob solche Aussagen gerechtfertigt sind bzw. gerechtfertigt werden können, müssen sie in verschiedener Hinsicht präzisiert werden. So müßten sie etwa im Hinblick auf Lernziele relativiert werden. Dabei stellt sich beispielsweise die Frage, warum sollen Schüler Volums- und Oberflächenberechnungen an Pyramiden durchführen können. Sind solche Berechnungen an sich ein Lernziel oder steht das Anwenden des Satzes von Pythagoras im Vordergrund oder ist die Ausbildung von geometrischem Anschauungs- und Darstellungsvermögen im Raum das vorrangige Lernziel? Im letzten Fall können aus geeigneten

Zeichnungen unbekannte Längen durch Messung ermittelt werden und das Anwenden des Satzes von Pythagoras mit den dazu nötigen Fertigkeiten erübrigt sich. Das schließt nicht aus, daß in einem zweiten Durchgang als weitere Lernziele das Anwenden des Satzes von Pythagoras sowie das Aufstellen und Umformen von Formeln hinzukommen.

Dieses Beispiel soll zeigen, daß didaktische Aussagen in hohem Maße mit Lernzielen zusammenhängen. Sie hängen darüber hinaus von einer Reihe von weiteren Faktoren ab: Vorkenntnisse und bereits erworbene Fähigkeiten, Einstellung zur Mathematik und Motivation, sowie Sozialform des Unterrichts seien beispielhaft hervorgehoben. Die Klärung solcher Zusammenhänge und damit verbunden die Bildung entsprechender Theorien sind wichtige Aufgaben der Didaktik der Mathematik. Dabei spielen Unterrichtserfahrungen und planmäßige empirische Untersuchungen sowohl bei der Bildung als auch bei der Bestätigung oder Revision von Theorien eine wesentliche Rolle: Theorien, die praktisches Handeln bestimmen, müssen sich in der Praxis bewähren.

DAS PROBLEM DER LERNZIELE

Eine zentrale Frage der Didaktik der Mathematik ist: *Was können, was sollen Schüler lernen? Welche Gründe sprechen dafür?* Dieses Problem soll im folgenden am Beispiel des Rechnens mit natürlichen Zahlen und mit Dezimalzahlen erörtert werden.

Es dürfte unbestritten sein, daß Schüler Fähigkeiten im Umgang mit diesen Zahlen, insbesondere Fertigkeiten im Rechnen erwerben sollen. Doch in welcher Form und in welchem Ausmaß? Als eine Minimalanforderung kann man ansehen, daß Schüler Rechnungen wie $23 \cdot 9$ im Kopf oder $855 \cdot 72$ schriftlich durchführen können. Es stellt sich aber die Frage, ob sie Rechnungen wie $97815 \cdot 6274$ oder $97815 : 632$ durchführen sollen. Warum sollen Schüler solche relativ umfangreiche Rechnungen durchführen?

Lernziele sind grundsätzlich normativ und von den Lernzielen des Schultyps abhängig. Die österreichischen Lehrpläne legen für die 1.Klassen der AHS und der Hauptschulen fest:

"Die vier Grundrechenoperationen geläufig und sicher mit einfachen Zahlen im Kopf durchführen. Die vier Grundrechenoperationen geläufig und sicher mit einfachen Zahlen schriftlich durchführen, beschränkt auf Zahlen, wie sie in Anwendungssituationen auftreten."

Der obige Hinweis auf Anwendungssituationen wirft neue Fragen auf. Tritt 97815:632 in Anwendungssituationen auf? Welchen Sachverhalt könnte eine Zahl wie 97815 sinnvoll beschreiben? Ist das eine sinnvolle Einwohnerzahl, wenn anzunehmen ist, daß sich diese Zahl in jeder Sekunde durch Geburten oder Todesfälle ändern kann. Ist ein Preis von 97815 S bei einem Kauf in der Praxis nicht gleichwertig einem Preis von 97810 S? Die Beurteilung der sinnvollen Genauigkeit erfordert Kenntnisse über die Anwendungssituation. Doch selbst, wenn 97815:632 eine in der Praxis sinnvolle Rechnung sein sollte, wird es zweckmäßig sein, ein Rechengerät einzusetzen.

Vielfach wird argumentiert, daß das Durchführen solcher Rechnungen eine Konzentrationsübung sei. Dazu ist zu bemerken, daß die Konzentration eines Menschen bei einer Tätigkeit vom Interesse und vom Sinn abhängt. Ferner ist es fraglich, ob Konzentrationsübungen beim Rechnen die Konzentrationsfähigkeit bei anderen Tätigkeiten, wie etwa beim Analysieren eines Problems oder beim Autofahren, fördern.

Wer trifft nun die Entscheidung, ob
- Schüler Geläufigkeit und Sicherheit beim Durchführen von Divisionen durch dreiziffrige Zahlen erlangen sollen und dies in Prüfungen nachweisen müssen oder
- nur einige Beispiele im Unterricht gerechnet werden oder
- solche Aufgaben nicht gestellt werden?

Lehrbücher bieten solche Aufgaben an, damit sind aber Lehrer nicht verpflichtet, solche Aufgaben zu stellen. Sie müssen vielmehr selbst entsprechende Entscheidungen treffen.

Kriterien für solche Entscheidungen über Lernziele können sein:
- Bedeutung bei der Lösung von mathematischen Problemen in der Schule oder bei weiterführenden Studien
- Bedeutung für außermathematische Anwendungen in der Schule oder im Alltag oder in Berufen oder bei Studien
- Bedeutung im Hinblick auf allgemeine Lernziele (wie z.B. Konzentrationsfähigkeit)
- Gewichtung im Vergleich zu anderen Lernzielen und im Hinblick auf die zur Verfügung stehende Unterrichtszeit

Bei der Gewichtung von Rechenfertigkeiten ist auf die Bedeutung weiterer Lernziele zum Rechnen hinzuweisen, die durch den Lehrplan gefordert werden und die auf den Erwerb eines "Gefühls für den Umgang mit Zahlen" zielen:

"Abschätzen von Rechenergebnissen, etwa durch Rechnen mit Näherungswerten, Ermitteln von Schranken, Erkennen, wie sich Änderungen einer Rechengröße auf das Ergebnis auswirken."

Beim Festlegen von Lernzielen zum Rechnen und bei Forschungen über Möglichkeiten der Realisierung solcher Lernziele müssen auch Auswirkungen der Verwendung des Taschenrechners betrachtet werden:

- Die Verwendung des Taschenrechners kann zur Verkümmerung von Rechenfertigkeiten führen. Wie kann man gegenwirken? (Eine Möglichkeit sind regelmäßige Übungen im Kopfrechnen in allen Schulstufen, sodaß die Schüler Sicherheit gewinnen und der Griff zum Taschenrechner überflüssig wird.)
- Das Abschätzen von Rechenergebnissen gewinnt an Bedeutung. Wie können Schüler dazu geführt werden, unaufgefordert Abschätzungen vorzunehmen?
- Aufgaben mit größerem Rechenaufwand können gestellt werden. Welche Aufgaben sind sinnvoll im Hinblick auf Lernziele?

- Viele mathematische Aufgaben mit numerischen Ergebnissen werden nicht wegen dieser Ergebnisse gestellt, sondern sollen zeigen, daß Schüler gewisse Gedankengänge und allgemeine Konzepte erfaßt haben. Die Verwendung des Taschenrechners rückt das numerische Rechnen in den Hintergrund und ermöglicht so die Konzentration auf das "Wesentliche" einer Aufgabe.
- Variationen von Zahlenangaben sind ohne großen Zeitaufwand möglich, wodurch Probleme der Rechengenauigkeit und Fehlerauswirkungen deutlich gemacht werden können.

Die bisherigen Betrachtungen über Lernziele zum Rechnen zeigen wichtige Forschungs- und Entwicklungsaufgaben der Didaktik der Mathematik auf: Hinterfragen und Rechtfertigen von Inhalten sowie von speziellen und allgemeinen Lernzielen im Rahmen der Zielsetzungen einer Schulform. Erarbeiten von Kriterien, die für Lehrer bei Entscheidungen über konkrete Zielsetzungen hilfreich sind. Untersuchen der Realisierbarkeit von Lernzielen. Entwicklung und Erprobung von Unterrichtsvorschlägen zur Realisierung von Lernzielen.

BEARBEITEN VON PROBLEMEN IN SACHSITUATIONEN

Der Erwerb von Fähigkeiten im numerischen Rechnen ist eine Voraussetzung, um eine Vielzahl von Problemen des Alltags und im Berufsleben bearbeiten und lösen zu können. Dazu reichen diese Fähigkeiten allerdings nicht aus. Denn die Bearbeitung eines Problems in einer Sachsituation setzt eine gewisse Vertrautheit mit der Situation voraus. Dazu gehören Kenntnisse über die Bedeutung sprachspezifischer Elemente, Wissen über allgemeine Beziehungen und spezielle Informationen. Darüber hinaus ist nötig, daß aus diesen Kenntnissen auf korrespondierende Rechenoperationen geschlossen werden kann. Daraus ergeben sich eine Reihe von Problemen für den Mathematikunterricht.

Eine zu untersuchende Sachsituation wird zumeist verbal beschrieben, aber auch Tabellen und graphische Darstellungen werden zur Präsentation herangezogen. Meistens werden Aufgaben in Schulbüchern durch einen zusammenhängenden Text dargestellt:

"Ein Beamter weist einen Monatsbezug von 31 160,60 S auf. Dazu kommen 1800 S Familienbeihilfe. Abzuziehen sind 7 361,9 S Lohnsteuer, 1095,20 S Kranken- und Sozialversicherungsbeitrag und 3 116,10 S Pensionsbeitrag. Außerdem werden dem Beamten, da er Mitglied der Gewerkschaft ist, 205 S Gewerkschaftsbeitrag abgezogen. Berechne den Nettobezug!"

Diese Aufgabe ist für die 1.Klasse der AHS vorgesehen und entspricht inhaltlich der Forderung nach praktischer Relevanz. Die darin enthaltenen Informationen werden allerdings in der Praxis auf einem Gehaltszettel in anderer Form dargestellt. Es stellt sich die allgemeine Frage, inwieweit es möglich ist, in Schulbüchern Sachsituationen so darzustellen, wie dies in der Praxis erfolgt.

Darüber hinaus werden mit diesem Beispiel weitere Probleme aufgezeigt:
- Ist diese Aufgabe für 11jährige Schüler passend? Sind sie mit der Sachsituation hinreichend vertraut?
- Welche Schwierigkeiten bereiten die auftretenden Begriffe "Monatsbezug", "Familienbeihilfe", "Kranken- und Sozialversicherungsbeitrag",...?
- Welche Schwierigkeiten bereitet der relativ lange und in der Darstellung unübersichtliche Text?

Aus der Vielzahl der Probleme, die das Bearbeiten von Aufgaben in Sachsituationen aufwirft, seien einige wichtige genannt:
- Auswahl der Sachgebiete: Ist praktischen Relevanz unbedingt erforderlich? In welchem Maß ist Vertrautheit mit dem Sachgebiet erforderlich? In welchem Ausmaß muß/soll im Mathematikunterricht Sachwissen vermittelt werden? In welchem Ausmaß sollen/können Schüler selbständig Informationen einholen?

- Text- und Interpretationsprobleme: In welchem Maß soll/kann der Mathematikunterricht Sprachfähigkeiten fördern bzw. Sprachprobleme vermeiden? Wie können Schüler lernen, mit längeren, unübersichtlichen Texten umzugehen, um sie zu erfassen? Welchen Stellenwert sollen die folgende Lernziele im Unterricht haben: Darstellen von Texten in kurzer, übersichtlicher Form: verbales, schematisches, graphisches Darstellen von Sachsituationen?
- Erkennen von funktionalen Zusammenhängen und von Rechenstrukturen (sinnvolle Rechenoperationen und deren Abfolge) in Sachsituationen: Woher wissen Schüler, welche Größen proportional sind bzw. als proportional angenommen werden können? (Sind Preis und Gewicht einer Ware stets proportional? Falls 1 kg einer Ware 10 S kostet, kosten dann x kg der Ware $10 \cdot x$ für jedes x?) Aus welchen Wörtern kann auf welche Rechenoperation geschlossen werden? ("Ein Preis wird auf das Doppelte erhöht", "Ein Preis wird um das Doppelte erhöht".)
- Finden und Wählen eines Lösungsweges: Vielfach werden Probleme aus (außermathematischen) Sachgebieten als Anwendungen einer unmittelbar zuvor erlernten Fertigkeit erlernt, die den Lösungsweg nahelegt (Dividieren - Aufgaben zum Anwenden des Dividierens). Welche Argumente sprechen für eine solche Vorgangsweise, und welche Argumente sprechen dafür, frühzeitig Aufgaben mit unterschiedlichen Rechenstrukturen zu stellen? Sollen Schülern frühzeitig Rezepte für Lösungswege mitgeteilt werden oder soll Schülern Zeit zum Experimentieren (mit möglichen Irrwegen) gegeben werden? [1]

[1] In einer Untersuchung von H.Radatz hat sich gezeigt, daß jüngere Schüler mit wenig Schul- und Mathematikerfahrung Sachaufgaben wesentlich sorgfältiger analysieren. Später werden die Arithmetik und ihre Anwendungen als eine Art Spiel mit künstlicher Regelhaftigkeit und ohne besondere Beziehungshaltigkeit zur außerschulischen Realität angesehen. [Radatz, S.215]

Diese unvollständige Aufzählung von Problemen macht deutlich, daß eingehende Untersuchungen zu Schülerschwierigkeiten sowie die Entwicklung und Erprobung von Unterrichtsmaßnahmen notwendig sind. Dazu sind, so wie in allen Untersuchungen zum Lernen und Lehren von Mathematik, systematische Aufarbeitungen von Unterrichtserfahrungen durch Lehrer selbst und durch Beobachter besonders wertvoll. Gespräche mit Schülern im Rahmen von Einzel- oder Partnerarbeit und schriftliche Aufzeichnungen von Schülern über ihre Schwierigkeiten können wichtige Informationen geben.[2] Aufzeichnungen von Interviews mit Tonbandgeräten und Videoaufzeichnungen von Unterricht sind weitere Mittel didaktischer Forschung.

VARIABLE UND ELEMENTARE ALGEBRA

Probleme der Lernziele, der Lernschwierigkeiten und der Erarbeitung geeigneter Unterrichtsmaßnahmen, die im Bereich der elementaren Arithmetik und deren Anwendung in Sachsituationen aufgezeigt wurden, stellen sich sich teilweise vermehrt und in größerer Schärfe in den anderen Gebieten der Schulmathematik. Dies trifft insbesondere auf den Umgang mit Variablen zu. Hier stellen sich grundsätzliche Fragen: Wozu braucht man Variable, welche Bedeutung haben sie? Gehört die Fähigkeit, mit Variablen umgehen zu können, zur Allgemeinbildung? Für viele Menschen sind Variable bedeutungslose abstrakte Objekte, zu denen sie keine Beziehung haben, für sie ist die elementare Algebra unnützer Ballast. Daraus entstehen häufig die bekannten Aversionen gegen Mathematik bzw. gegen den Mathematikunterricht.

[2] Über einen Unterricht, in dem Schüler in einem "Reisetagebuch" fortlaufend schriftliche Aufzeichnungen über ihre Auseinandersetzung mit dem Schulstoff machen, wird von P.Gallin und U.Ruf berichtet.

Die aufgezeigten Probleme erfordern zunächst eine Klärung der Bedeutung von Variablen. In der Mathematik werden Variable zum Beschreiben von Gesetzmäßigkeiten benützt, beispielsweise "$a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$". Dieses Rechengesetz läßt sich auch verbal formulieren: "Statt eine Zahl mit der Summe von zwei (weiteren) Zahlen zu multiplizieren, kann man diese Zahl mit jeder der beiden anderen Zahlen multiplizieren und die so erhaltenen Produkte addieren." Auch diese verbale Formulierung des Distributivgesetzes enthält Variable, nämlich die Worte bzw. Wortgruppen "eine Zahl" bzw. "weitere Zahlen". Solche Wortvariable werden auch in der Umgangssprache verwendet, um allgemeingültige Aussagen zu formulieren: "Kühe ernähren sich von Pflanzen" mit den Variablen "Kühe" und "Pflanzen".

Allgemein sind Variable unverzichtbare Objekte, um allgemeingültige Sachverhalte, also Gesetzmäßigkeiten bzw. Regeln zu beschreiben. Mathematisches Handeln wird nun in besonderem Maße von Gesetzmäßigkeiten geprägt. Die beiden verschiedenen Formulierungen des Distributivgesetzes zeigen, daß die Verwendung von Buchstaben als Variable und insbesondere die Verwendung von Buchstaben als Zeichen für "beliebige Zahlen" knappe und übersichtliche Darstellungen ermöglicht.

Ferner sind formale Darstellungen ein wichtiges Mittel zum Problemlösen. Hat man einen Sachverhalt durch eine Formel bzw. eine Gleichung beschrieben, beispielsweise die Berechnung des Flächeninhaltes eines Trapezes oder die Berechnung von Zinsen, so können durch Einsetzen in diese Formeln, Berechnungen durchgeführt werden, ohne jene Denkarbeit durchführen zu müssen, die zum Aufstellen der Formeln nötig ist. Durch Umformen dieser Formeln können weitere Größen ermittelt werden.

Diese Überlegungen zeigen drei Aspekte von Variablen auf:
- "Gegenstandsaspekt", Variable als Zeichen für Zahlen und als Mittel zum Darstellen von Sachverhalten
- "Einsetzaspekt", Variable als Platzhalter für Zahlen
- "Kalkülaspekt", Variable als Rechenobjekte

Im Unterricht dominieren vielfach der Einsetzaspekt und der Kalkülaspekt. Um der Bedeutung von Variablen für die Mathematik gerecht zu werden, sollten die Schüler jedoch auch Fähigkeiten im Darstellen von Sachverhalten mit Variablen und im Interpretieren solcher Darstellungen erlangen. Auf welche Weise diese Fähigkeiten entwickelt werden können, stellt ein weiteres Problem der Didaktik der Mathematik dar.

Ähnlich wie in der elementaren Arithmetik stellt sich auch in der elementaren Algebra die Frage, in welchem Ausmaß das Umformen von Termen und Formeln sowie das Lösen von Gleichungen beherrscht werden sollen. Kriterien für entsprechende Entscheidungen wurden bereits im Abschnitt "Das Problem der Lernziele" vorgestellt. Untersuchungen zeigen, daß ein erheblicher Teil von Termen und Gleichungen, die in Schulbüchern enthalten sind, Strukturen aufweisen, die im späteren Mathematikunterricht und in der universitären Mathematik nicht auftreten. Dazu einige Beispiele:

$$\left(-\frac{4r^2s}{3a^3b^2}\right) : \left(\frac{6r^2s^2}{a^3b^3}\right) = \qquad \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) =$$

$$(10u^2+19uv+6v^2):(2u+3v) = \qquad \frac{a+5}{(a-5)^2} = \frac{2}{a+5} - \frac{a}{a^2-25}$$

Vielfach werden Aufgabenstellungen dieser Art damit begründet, daß Schüler schwierigere Aufgaben lösen müssen, um einfachere Umformungen zu beherrschen. Dafür gibt es aber keine Belege durch empirische Untersuchungen. Es ist auch nicht einzusehen, daß durch Aufgaben der obigen Struktur Fehler bei Umformungen von Bruchtermen der Art $\frac{\frac{x}{2}}{3}$ oder $5-\frac{x-2}{2}$ vermieden werden.

Notwendig sind auch hier verschiedenartige Untersuchungen: Welche Schwierigkeiten und Fehler treten bei einzelnen Aufgabentypen auf? Inwiefern hängen Schwierigkeiten von der Unterrichtsform (Einzelarbeit, Partner- oder Gruppenarbeit, Vorrechnen an der Tafel), von der Übungszeit und von der Stufung der Komplexität der Aufgaben ab? Welche Rolle spielt das Erkennen von Termstrukturen? Inwieweit werden Fehler vermieden, wenn Schüler Termstrukturen sichtbar machen, etwa durch Einkreisen von Teiltermen? Ist das Begründen einzelner Umformungsschritte durch Angeben der verwendeten Rechenregeln hilfreich ?

Eine eingehende Auseinandersetzung mit dem Problemkreis "Variable und elementare Algebra" erfolgt in dem Buch "Didaktische Probleme der elementaren Algebra" von G.Malle.

ALLGEMEINE MATHEMATISCHE FÄHIGKEITEN

In der Bildungs- und Lehraufgabe des Lehrplans für Mathematik an AHS sind u.a. folgende allgemeine Lernziele angeführt:
- Argumentieren und exaktes Arbeiten
- Darstellen und Interpretieren
- Produktives Arbeiten

Konkretisierung, Möglichkeiten und Probleme der Realisierung können hier nur skizzenhaft aufgezeigt werden.

Argumentieren und exaktes Arbeiten[3]

Damit Schüler entsprechende Fähigkeiten erwerben, müssen sie nicht nur vorgeführte Argumentationen nachvollziehen können, sondern auch in Einzel- oder Partnerarbeit im Rahmen passender Aufgaben selbständig schriftlich Argumentationen durchführen. Das Spektrum solcher Argumentationen reicht vom Erklären einzelner Handlungen (Rechen- oder Konstruktionsschritte), über das Begründen von Lösungswegen bei einzelnen Aufgaben und das Begründen von Beweisschritten bis zum Beweisen einfacher mathematischer Sätze oder Formeln. Dabei sind anschauliche Begründungen, beispielhaft-paradigmatische Begründungen, grobe Skizzierungen von Beweisen und weitgehend formale Beweise denkbar.

[3]Eingehendere Ausführungen zu diesem Thema bei H.Bürger: "Argumentieren im Mathematikunterricht".

Einige Beispiele zur Erläuterung:

- Erkläre an einer Zeichnung, warum $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$ ist.
- Warum kann man den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 5 und 3 durch die Rechnung $5 \cdot 3$ berechnen?
- Warum zeichnet man die Streckensymmetralen eines Dreiecks, um den Umkreismittelpunkt zu konstruieren? Warum schneiden sich alle drei Streckensymmetralen in einem Punkt?
- Leite Formeln für die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks her.
- Beweise den Sinussatz.
- Warum kann man das Volumen eines Drehkörpers mit einem Integral berechnen?

Darstellen und Interpretieren

Sollen Schüler entsprechende Fähigkeiten erwerben, müssen sie mathematische Sachverhalte formal, verbal oder graphisch darstellen und solche Darstellungen interpretieren können. Interpretationen können etwa sein: Wechseln von Darstellungsformen; Deuten von formalen Begriffen durch Belegen mit Vorstellungen und Inhalten; Herauslesen von Eigenschaften und Beziehungen aus Darstellungen.

Sowohl bei diesem Lernziel als auch beim Lernziel "Argumentieren und exaktes Arbeiten" liegen im Vergleich zu anderen Lernzielen nur relativ geringe Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis vor. Auch bei Leistungsfeststellungen können wegen der Neuartigkeit von Aufgabenstellungen Probleme auftreten.

Produktives Arbeiten

Tätigkeiten, bei denen eine Auseinandersetzung mit Situationen erfolgt, die zumindest teilweise neuartige Elemente enthalten, können als produktives Arbeiten angesehen werden. Voraussetzungen dafür sind ein hohes Maß an Selbsttätigkeit und die

Vermeidung von Zeitdruck. Manche Rahmenbedingungen des Unterrichts sind jedoch nicht förderlich. wie etwa die Beschränkung einer Lerneinheit (Unterrichtsstunde) auf 50 Minuten. Ferner wird der Mathematikunterricht sehr stark durch die Anforderungen bei Schularbeiten geprägt. bei denen produktives Arbeiten nur in sehr eingeschränktem Maße möglich ist und Rezepte für Aufgabenlösungen wünschenswert sind.

Produktives Arbeiten erfolgt grundsätzlich auch beim Lernen neuer mathematischer Begriffe und bei deren Anwendung. Das Bereitstellen von Situationen. die die für eine Begriffsbildung nötige Abstraktion fördern, die Initiierung von geeigneten mentalen Repräsentationen des Begriffs und das Anwenden des Begriffs in verschiedenen Bereichen. die seine Verallgemeinerung ermöglichen, sind für Lernprozesse wesentlich. Damit wird ein weiterer wesentlicher Ausschnitt aus der Vielfalt didaktischer Forschung aufgezeigt. die hier nur unvollständig beschrieben werden konnte.

LITERATUR:

Bürger. H.: Argumentieren im Mathematikunterricht. In: ÖMG-Didaktik-Reihe, Heft 15/1987, S.1-14.

Gallin,P. - Ruf,U.: Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. In: Journal für Mathematik-Didaktik. Heft 1, 1993, S.2 - 33.

Malle,G.: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig, 1993.

Radatz,H.: Lösen eingekleideter Aufgaben. In: Journal für Mathematik-Didaktik. Heft 3, 1983, S.205 - 219.